Análisis de la derivación bajo el signo integral

Analysis of the derivation under the integration sign

M. R. Fulla, I. E. Rivera, J. L. Palacio[1]

Recibido: 1 de marzo de 2016

Aceptado: 31 de mayo de 2016

Resumen

En numerosos problemas de la mecánica estadística aplicada, como es el caso de los fenómenos de transporte, las denominadas derivadas bajo la integral han sido una herramienta importante e interesante de explotar, ya que en el estudio de sistemas ingenieriles, es posible realizar una caracterización de su comportamiento y conocer sus propiedades mós generales a partir de sus derivadas bajo la integral. Concretamente en el entorno de las matemáticas avanzadas, el tratamiento de la derivada bajo la integral recibe el nombre de regla de Leibnitz y se encuentra en algunos textos de análisis matemático. En este articulo se hace la demostración de este teorema en el caso real y así contribuir a una mejor comprension a matemáticos, Ingenieros y Físicos.

Palabras claves: *Regla de Leibnitz, fenómenos de transporte, mecánica estadística, derivada bajo la integral.*

Abstract

In numerous problems of applied statistical mechanics, such as the case of transport phenomena, the so-called derivatives under the integral have been an important and interesting tool to exploit, since in the study of these type of engineering systems, it is possible to perform a characterization of their behavior and know its general properties from their derivatives under the integral. Specifically, in the advanced mathematics, the treatment of the derivative under the integral is called the Leib- nitz's rule available in some mathematical analysis books. In the present paper the demonstration of this theorem is achieved in the real case contributing to a better understanding from mathematicians, engineers and physicists.

---

1 Institucion Universitaria Pascual Bravo, A.A 6564, Medellln - Colombia mrfulla@pascualbravo.edu.co,ismael.rivera@pascualbravo.edu.co,jlpalaci@pascualbravo.edu.co

Key words: *Leibnitz's rule, transport phenomena, statistical mechanics, derivatives under the integral.*

1. Introducción

En diversas áreas de la ingeniería, especialmente aquellas que han sido el motor del desarrollo económico y tecnológico, como la ingeniería química e industrial, la hidrodinamica, la termodinámica, y concretamente todos aquellos campos relacionados con el diseño de maquinaria industrial, se han venido continuamente desarrollando complejos modelos fisicomatemáticos para la descripción, modelacion y predicción de su funcionamiento [1-3]. En esta tarea muy a menudo se requiere de la implementación de leyes físicas como la ley de Fick [4,5] (que permite describir procesos de difusión de materia o energía en un medio en el que inicialmente no existe equilibrio químico o térmico), la ecuación de Navier-Stokes [5,6] (que modela el comportamiento de fluidos viscosos), o la Ecuación diferencial de Bernoulli [5, 7] (que puede utilizarse para describir el movimiento de material particulado en fluidos en un regimen de altas velocidades que da origen comportamientos no lineales), y entre muchas otras [1-3,5,7]. Dada la naturaleza no lineal de muchas de estas leyes y de la inexistencia de metodos generalizados de solución, muchos investigadores optan por soluciones heurísticas o numéricas [8-10] que tratan de superar algunas dificultades en cuanto a soluciones exactas se refieren, para obtener resultados cuasi-exactos que describan adecuadamente el fenómeno de interés. No obstante se continúan elaborando desarrollos y análisis que permitan darle solidez a la construcción de soluciones analíticas. En este proceso de construcción una de las herramientas utilizadas es la regla de Leibnitz, que aparece en la deducción analítica de muchos modelos de física e ingeniería y es de gran utilidad para encontrar la solución de dichos modelos, por lo que nos ha parecido importante dar a conocer este teorema y cuyo objetivo principal de este trabajo es enunciar y demostrar la regla de Leibnitz en R formalmente como un teorema que permite intercambiar las operaciones de derivación e integraicón.

Existen múltiples aplicaciones de la regla de Leibnitz en el campo de la ingeniería, a modo de ejemplo, ella surge naturalmente en la deducción de un modelo de ecuaciones diferenciales parciales cuasi lineales que describen el funcionamiento de los molinos de bolas utilizados en la industria del cemento [11, 12]. Se encuentran tambien en la literatura trabajos que muestran versiones mas generales que incluyen las condiciones necesarias y suficientes para intercambiar una integral y una derivada como puede verse en [13]. Un clásico error proveniente del uso injustificado de dicho intercambio, cometido originalmente por Cauchy, se encuentra y discute en [14].

A lo largo de este trabajo, las definiciones de función continua, intervalo abierto, intervalo cerrado corresponden a las definiciones típicas utilizadas en el calculo elemental, además serán definidos en R, el cual es el conjunto de los nuámeros reales y se impondrá la condición de que sea uniformemente continua en sus dos variables. En R en un dominio cerrado, es suficiente que sea continua. Esta última condición implica la condición de que la derivada parcial de f sea integrable en , esto nos da el resultado que probaremos a continuación y que aparece también en [15], una prueba más general utilizando la integral de Lebesgue puede ser encontrada en [16], donde ademáas imitaremos algunos de los pasos para demostrar la parte real.

2. Demostración de la Regla de Leibnitz

Teorema 1. *Sean I, J intervalos reales no triviales, con I compacto y J abierto. Sea $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que:*

a) $f(\bullet, y)$ *es integrable en I para todo $y \in J$*

b) $f(x, \bullet)$ *es derivable en J para todo $x \in I$.*

Supongamos además que $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $I \times J$. Entonces:

a) $\frac{\partial f}{\partial y} f(\bullet, y)$ *es integrable para todo $y \in J$*

b) $\int_I f(x, y)dx$ *es derivable con derivada continua en J para todo $x \in I$.*

Y se cumple la regla de derivación bajo la integral $\frac{d}{dy}\int_I f(x,y)dx = \int_I \frac{df}{dy}(x,y)dx$ para todo $y \in J$.

Demostración. Sea $y \in J$ fijo. La derivada de la función $\int_I f(x,y)dx$, con respecto a *y es,* $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\int_I f(x, y+h)\,dx - f(x,y)dx\right) = \frac{d}{dy}\int_I f(x,y)dx$ *y que este límite es* $\int_I \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$.

Sea $\epsilon > 0$. Tomemos $d > 0$ suficientemente pequeño de manera que $[y-d, y+d] \subseteq J$ por hipótesis $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $I\ x\ J$ y por tanto continua en $I \times [y-d, y+d]$ y como $I \times [y-d, y+d]$ es cerrado entonces por el teorema 5, f es uniformemente continua en $I \times [y-d, y+d]$, así podemos elegir un $0 < \delta \neq d$ tal que $\mid \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_2) \mid \leq \frac{\epsilon}{\mid I \mid}$ para todo $x \in I$, para todo $y_1, Y_2 \in [y-d, y+d]$ tales que $\mid y_1 - y_2 \mid \leq \delta.(*)$

Tomemos ahora cualquier $h \in \mathbb{R}$ con$|h| \leq \delta,\ h \neq 0.$ El teorema del valor medio asegura que para cada $x \in I$ hay un cierto y_x en el intervalo delimitado por x y $y+h$ tal que $\frac{1}{h}(f(x, y+h) - f(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_x)$. Esto nos permite probar que el límite que define la derivada de f con respecto a y es uniforme $\mid \frac{1}{h}(f(x, y+h) - f(x,y)) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \mid = \mid \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \mid \leq \frac{\epsilon}{\mid I \mid}$.

Entonces, como $\frac{\partial f}{\partial y}$ es también integrable en I (ya que es continua), estamos en condición de probar que el límite de la derivada y de la función $\int_I f(x,y)dx$ existe y es el esperado

$$
\begin{aligned}
&\mid \frac{1}{h}\left(\int_I (f(x, y+h) - \int_I f(x,y)dx\right) - \int_I \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \mid \\
&= \mid \int_I \left(\frac{1}{h}(f(x, y+h)dx - f(x,y)) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)dx \mid \\
&\leq \int_I \mid \left(\frac{1}{h}(f(x, y+h)dx - f(x,y)) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \mid dx \\
&= \int_I \mid \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \mid \leq \int_I \frac{\epsilon}{\mid I \mid} dx = \epsilon.
\end{aligned}
$$

Que es precisamente la derivada de $\int_I f(x,y)dx$ por medio de la definición de límite. Con esto tenemos que $\frac{d}{dy}\int_I f(x,y)dx = \int_I \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$ Es necesario comprobar que la derivada es continua. Sea $y \in J$ en cualquiera, y dado $\epsilon > 0$ elijamos $d, \delta > 0$ igual que en $(*)$. Entonces para $h \in \mathbb{R}, |h| < \delta$, por teorema 7. $\mid \int_I \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx - \int_I \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+h)dx| \leq \int_I |\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+h)|dx \leq \int_I \frac{\epsilon}{\mid I \mid}dx = \epsilon,$ luego la derivada es continua.

Lema 2. *Sean I, J intervalos reales no triviales, con I cerrado y J abierto. Sea $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x, \bullet)$es derivable en J para todo $x \in I$. Supongamos además que $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $I \times J$. Fijemos $t_o \in I$. Entonces, la función: $G : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}\ (t,y) \longrightarrow \int_{t_0}^{t} f(x,y)dx$ Es derivable en cualquier punto del interior de $I \times J$.*

Demostración. Calculemos las derivadas parciales de G y veamos que son contínuas; entonces G sería diferenciable en los puntos interiores. El teorema fundamental del cálculo dice que para $(t, \lambda) \in I \times J$, $\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} f(x,y)dx = f(t,y)$ la cual es una función continua. De otro lado, la función f está en las hipótesis del teorema anterior en cualquier conjunto $[t_0, t] \times J$ con $t \in I$, luego G tiene derivada parcial con respecto a y así $\frac{d}{dy}\int_{t_0}^{t} f(x,y)dx = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial y} f(x,y)dx$ (Observar que se cumple sin importar si t es mayor o menor que t_0. Veamos que esta función es continua en $I \times J$. Sea $(t,y) \in I \times J$, y $\epsilon > 0$. $\square$

Elijamos $\delta > 0$ tal que $[y-\delta, y+\delta] \subseteq J$ y para todo h con $|h| < \delta$, $\int_I |\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y+h)|dx < \frac{\epsilon}{2}$ (esto es posible en virtud de la parte final de la demostración del teorema anterior). Elijamos también una cota $M > 0$ de $\frac{\partial f}{\partial y}$ en el cerrado $I \times [y-\delta, y+\delta]$ y veamos que en efecto $\int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ es continua. Entonces, para $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ tales que $|h_1| \leq \frac{\epsilon}{2M}$, $|h_2| \leq \delta$.

$$
\begin{aligned}
&|\int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial y}(x+h_1, y+h_2)dx| = \\
&|\int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx - \int_{t_0}^{t-h_1} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+h_2)dx| \\
&|\int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx - \left(\int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+h_2)dx\right. \\
&\left.+ \int_{t_0}^{t-h_1} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+h_2)dx\right)| = \\
&|\int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+h_2)\right) \\
&+ \int_{t-h_1}^{t} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+h_2)dx| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} |\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+h_2)|dx \\
&+ |\int_{t-h_1}^{t} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+h_2)dx| \\
&\leq \int_{I} |\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+h_2)|dx + |h_1|M \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}
$$

Corolario 3. (regla de derivación de Leibnitz). *Sean I, J intervalos reales no triviales, con I cerrado y J abierto. Sea $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $I \times J$. tal que $f(x, \bullet)$ es derivable en J para todo $x \in I$ supongamos además que $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $I \times J$. Sea $t_o \in I$ y $g : J \longrightarrow I$ una función derivable.*

Entonces,

a) $\frac{\partial f}{\partial y}(\bullet, y)$ *en integrable para todo* $y \in J$

b) $\int_{t_0}^{g(y)} f(x,y)dx$ *es derivable en* J *para todo* $x \in J$ *y se cumple la regla de derivación de Leibnitz,* $\frac{d}{dy}\int_{t_0}^{g(y)} f(x,y)dy = f(g(y),y)g'(y) + \int_{t_0}^{g(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy$ *para todo* $y \in J$

Demostración. Sea $H = G \circ F$:

$$J \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \longrightarrow \int_{t_0}^{g(y)} f(x,y)dx$$

Donde G es la función del lema anterior y $F : J \longrightarrow I \times J$

Luego derivando H con la regla de la cadena se tiene:

$H'(y) = G'(f(y)) \cdot F'(y)$

$$\frac{d}{dy}\int_{t_0}^{g(y)} f(x,y)dx$$
$$= \left[f(g(y),y) \int_{t_0}^{g(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx \right] \left[\begin{array}{c} g'(y) \\ 1 \end{array} \right]$$
$$\frac{d}{dy}\int_{t_0}^{g(y)} f(x,y)dx$$
$$= f(g(y),y)g'(y) + \int_{t_0}^{g(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

$\square$

Corolario 4 (regla de derivación de Leibnitz). *Sean* I, J *intervalos reales no triviales, con* I *cerrado y* J *abierto. Sea* $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua en* $I \times J$. *tal que* $f(x, \bullet)$ *es derivable en* J *para todo* $x \in I$ *supongamos además que* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *es continua en* $I \times J$. *Sean* $h, g : J \longrightarrow I$ *una función derivable.*

Entonces,

a) $\frac{\partial f}{\partial y}(\bullet, y)$ *en integrable para todo* $y \in J$

b) $\int_{h(y)}^{g(y)} f(x,y)dx$ *es derivable en* J *para todo* $x \in J$ *y se cumple la regla de derivación de Leibnitz,* $\frac{d}{dy}\int_{t_0}^{g(y)} f(x,y)dx = \int_{h(y)}^{g(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx + f(g(y),y)g'(y) - f(h(x),y) \cdot h'(y)$

$$= \int_{h(y)}^{g(y)} \left\{ \frac{\partial f(x,y)dx}{\partial y} + \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx} f(x,y) \right] \right\} dx$$

Demostración. $\dfrac{d}{dy}\displaystyle\int_{h(y)}^{g(y)} f(x,y)dx = \dfrac{d}{dy}\Big[\displaystyle\int_{h(y)}^{g(y)} f(x,y)dx + \displaystyle\int_{t_0}^{g(x)} f(x,y)dx\Big]$

$$= \frac{d}{dy}\Big[\; - \int_{t_0}^{h(y)} f(x,y)dx \; + \int_{t_0}^{g(y)} f(x,y)dx\Big]$$

por el corolario anterior se tiene:

$$-\Big(f(h(y),y)\cdot h'(y)$$
$$+\int_{t_0}^{h(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx\Big)$$
$$+\Big(f(g(y),y)\cdot g'(y)$$
$$+\int_{t_0}^{g(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx\Big)$$
$$= \frac{d}{dy}\int_{h(y)}^{g(y)} f(x,y)dx$$
$$+f(g(y),y)g'(y)\cdot g'(y) - f(h(y),y)\cdot h'(y) \qquad \square$$

Conclusiones

En este trabajo se demostró la regla de Leibnitz que permite realizar intercambios de las operaciones de derivación e integración, sirviendo como herramienta en la deducción analítica de muchos modelos en ingeniería, de esta manera pueda ser utilizada con comodidad en deducciones y cálculos matemáticos. En este proceso se dió a conocer las condiciones que se deben tener en cuenta para que la derivación bajo el signo integral pueda ser utilizada sin errores toda vez que en muchos campos este teorema se da por supuesto. Finalmente, motivados por la escasez de trabajos donde se discuta la prueba de la regla de Leibnitz, se ha logrado demostrar su validez para el caso real. Esto debido a que en los casos reales se encuentra un gran potencial para aplicaciones en diversos campos de la ingeniería y en la mayoría de textos de análisis donde aparece la prueba esta se encuentra con resultados más generales utilizando la integral de Lebesgue.

Referencias

[1] B. Alder, S.Fernbach, M. Rotenberg, Met- hods In Computational Physics- Fundamental Methods in Hydrodynamics, Academic Press Inc, New york, 1994.

[2] S. Bayin, Essentials of Mathematical Methods in Science and Engineering, Wiley, New Jersey, 2008.

[3] S. Bayin, Mathematical Methods in Science and Engineering, Wiley, New Jersey, 2006.

[4] K.T. Tang, Mathematical Methods for En- gineers and Scientists, Springer, Berlin, 2007.

[5] G. Arfken, H. Webwe, Mathematical Methods for Physicists, Elsevier, USA, 2005.

[6] S. Hassani, Mathematical Methods for Stu- dents of Physics and Related Fields, Sprin- ger, Berlin, 2009.

[7] D. Duffy, Transform Methods for Solving Partial Differential Equations, Chapman and Hall, USA, 2004.

[8] R. Courant, D. Hilbert, Methods of Mathe- matical Physics, John Wiley and Sons, New York, 1966.

[9] B. Koren, K. Vuik, Advanced Computational Methods in Science and Engineering, Springer, Berlin, 2010.

[10] I. Prigogine, Advances in Chemical Physics, Jhon Wiley and Sons, USA, 1996.

[11] I. E. Rivera Madrid , B. Álvarez Rodríguez , O. Bustamante , O. J. Restrepo Baena, J. M. Menendez- Aguado. Ceramic ball wear prediction in tumbling mills as a grinding media selection tool, Powder Technol.268(2014) 373-376.

[12] I. E. Rivera Madrid, Aplicación de un modelo de balance poblacional a un Molino de bolas en la industria del cemento. Ingeniería y ciencia, vol. 10,n°19,enero-junio 2014.

[13] E. Talvila. Some divergent trigonometric integrals. Amer. Math. Monthly 108 (2001), no.5, 432-436.ArXiv: math.CA/0101011.

[14] E. Talvila. Necessary and sufficient conditions for differentiating under the integral sign.Amer. Math. Monthly 108 (2001), no. 6, 544-548. arXiv: math.CA/0101012.

[15] R. Courant y F. John, Introduction to Calculus and Analysis, Volume II/2.Springer, 2000.

[16] J. A. Cañizo Rincón, Derivación bajo la integral. http://www.mat.uab.cat/~canizo/tex/.