



Configuración Óptima de Transductores Piezoeléctricos para Control Activo de Vibraciones usando el Método de Optimización Topológica

Optimal configuration of piezoelectric transducers for active control of vibrations through topological optimization method

Daniel Giraldo Guzmán ^a & Wilfredo Montealegre Rubio ^b

^a Facultad de Minas, Universidad Nacional de Colombia, Medellín-Colombia, dagiraldogu@unal.edu.co

^b Facultad de Minas, Universidad Nacional de Colombia, Medellín-Colombia, wmontealegrer@unal.edu.co

Recibido: noviembre 9, 2018. Aceptado: diciembre 18, 2018.

Resumen

El método de optimización topológica (MOT) es usado para encontrar una distribución óptima de transductores piezoeléctricos (sensor y actuador) sobre una estructura elástica a partir de un modelo de elementos finitos convertido a variables en espacios de estado. Con dos funciones objetivo en paralelo, se busca maximizar la traza del gramiano de controlabilidad y la traza del gramiano de observabilidad. En la solución del problema de optimización se usa el modelo de interpolación de material SIMP y el método de Programación Lineal Secuencial (PLS); por tanto, se presenta el análisis de sensibilidad de ambas funciones objetivo. Finalmente, un controlador LQG es implementado para verificar el rendimiento estructural obtenido luego del proceso de optimización para un caso de estudio de una viga en Cantiléver sometida a vibración, dispuesta de un actuador y un sensor piezoeléctrico. Los resultados de optimización son verificados con el análisis energético del esfuerzo de control, la sensibilidad del sensor, y el coeficiente de amortiguamiento del sistema planta-controlador.

Palabras clave: Control Activo de Vibraciones, Materiales Piezoeléctricos, Optimización Topológica.

Abstract

The topological optimization method is used to find an optimal distribution of piezoelectric transducers (sensor and actuator) on an elastic structure from a finite element model in state space variables. With two objective functions in parallel, we aim to maximize the traces of both the observability and controllability Gramian. In the solution of the optimization problem, the SIMP material interpolation model and the Sequential Linear Programming (PLS) method are used; therefore, the sensitivity analysis of both objective functions is presented. Finally, an LQG controller is implemented to verify the structural performance obtained after the optimization process for a case study of a Cantilever beam subjected to vibration, equipped with an actuator and a piezoelectric sensor. The optimization results are verified with the energy analysis of the control effort, the sensitivity of the sensor, and the damping coefficient of the plant-controller system.

Keywords: Active control of vibrations, Piezoelectric materials, topological optimization.

1 INTRODUCCIÓN

Muchas de las actividades humanas involucran vibraciones de una forma u otra [1], y sus aplicaciones en ingeniería están presentes desde grandes estructuras (e.g. ingeniería civil) hasta nano-mecanismos (e.g. nano-ingeniería), y sus efectos se pueden presentar en tres tipos de situaciones [2]:

- Falla de componentes por esfuerzos excesivos o fatiga
- Deterioro del *comfort* o la salud humana por exposición a ruido y vibraciones.
- Dispositivos de alta precisión, donde las condiciones de operación son muy exigentes, y los efectos de micro-vibración limitan su rendimiento.

Ya que el diseño de mecanismos y estructuras se ha vuelto cada vez más preciso y menos tolerante a las vibraciones [3], los problemas de control estructural se han vuelto cada vez más comunes en ingeniería. Lo anterior lleva al concepto de estructuras inteligentes [4]. Estas se refieren a estructuras provistas de un conjunto de sensores y actuadores acoplados por un controlador. Uno de los materiales ampliamente usados en control

Citar como:

D. Giraldo, W. Montealegre. "Configuración Óptima de Transductores Piezoeléctricos para Control Activo de Vibraciones usando el Método de Optimización Topológica" Revista CINTEX, Vol. 23(2), pp. 86-94. 2018.

de vibración de estructuras por su respuesta rápida, la excelente capacidad que ofrecen como sensores o actuadores, su alto coeficiente de acople electromecánico, y su fácil implementación son los materiales piezoeléctricos [5]. En la mayoría de las aplicaciones de control de vibraciones de estructuras flexibles, la ubicación y forma de los sensores y actuadores se asume como una distribución fija ya dada y el trabajo del diseñador es buscar una ley de control aceptable que logre los objetivos del control [6]. Sin embargo, el problema de la ubicación óptima de sensores y actuadores en estructuras flexibles puede ser un problema aún más importante que la misma ley de control, ya que la incorrecta posición de estos transductores minimiza la controlabilidad, reduce la eficiencia y degrada el rendimiento del sistema de control [7].

Este problema se ha tratado desde diferentes abordajes. Por ejemplo, en [8] encuentran la posición óptima al obtener dos soluciones generalizadas de la ecuación de Riccati; en [9] desarrollan un método de posición óptima basada en gradientes, y en [10] proponen una optimización multiobjetivo con algoritmos genéticos. En los últimos 20 años se registran pocas publicaciones relacionadas al control activo de vibraciones con materiales piezoeléctricos usando el método de optimización topológica, entre ellos, se destacan los trabajos de [11]–[14] en los cuales se aborda el problema con diferentes formulaciones del modelado y optimización.

En este trabajo, se formula una metodología de diseño conceptual que a través del Método de Optimización Topológica (MOT) usando como función objetivo la maximización de la traza del gramiano controlabilidad y del gramiano de observabilidad del sistema. Como variables de diseño se usa la pseudo-densidad del modelo de interpolación SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) en las capas de material piezoeléctrico. Para el modelado del sistema se usa el Método de los Elementos Finitos (MEF), y como estrategia de control se usa un controlador óptimo que minimiza una función de energía en el caso de los actuadores y maximiza la energía en el caso de los sensores.

2 METODOLOGÍA

2.1 Materiales Piezoeléctricos

Piezolectricidad literalmente significa “electricidad generada por la presión” [5]. Es un fenómeno encontrado naturalmente en estructuras cristalinas como el cuarzo, la turmalina, el topacio o la sal de Rochelle. Estos materiales cuando se someten a presión mecánica generan carga eléctrica, y cuando son expuestos a un campo eléctrico se deforman mecánicamente [5]. Así, el efecto de la piezolectricidad puede ser entendido como las transferencias entre la energía eléctrica y la energía mecánica [15]. Las ecuaciones constitutivas de los materiales piezoeléctricos resultan ser un acople entre las ecuaciones constitutivas de un sistema mecánico con las de un sistema eléctrico, usando coeficientes de piezolectricidad. Esto se escribe en notación tensorial reducida [16]:

$$\begin{bmatrix} T \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^E & -e \\ e & \epsilon^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ E \end{bmatrix} \quad (1)$$

Donde T es el tensor de esfuerzos, D es el tensor de densidad de flujo eléctrico, S es el tenor de deformaciones mecánicas, E es el tensor de campo eléctrico, c^E es la matriz de elasticidad a campo eléctrico constante, e es la matriz de coeficientes de piezolectricidad, y ϵ^S es la matriz de permitividad a deformación constante. En conjunto con estas ecuaciones, un principio variacional modificado para incluir el efecto piezoeléctrico, y la formulación fuerte del problema, es posible escribir la formulación de elementos finitos para sistemas dinámicos. El comportamiento de este tipo de sistemas está descrito por la ecuación [17]:

$$\begin{bmatrix} M_{uu} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{uu} & 0 \\ 0 & D_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ q \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Donde u es el vector de desplazamientos, ϕ el vector de voltajes, f el vector de fuerza mecánica, q el vector de cargas eléctricas, M_{uu} la matriz de masa, K_{uu} la matriz rigidez, $K_{u\phi}$ la matriz de acople piezoeléctrico, $K_{\phi\phi}$ la matriz de capacitancia, D_{uu} la matriz de amortiguamiento mecánico y $D_{\phi\phi}$ amortiguamiento eléctrico.

2.2 Control de Vibraciones

En este trabajo se aborda el control activo de vibraciones en estructuras delgadas a partir de un modelo de espacios de estado, derivado de la formulación de elementos finitos. El proceso de convertir un modelo de elementos finitos a un modelo de variables en espacios de estado consiste en realizar una condensación de los grados de libertad que están asociados a la estructura, a los actuadores y a los sensores. En el proceso de condensación se acoplan los grados de libertad que pertenecen a los electrodos de los materiales piezoeléctricos, y se reorganizar los términos de la ecuación dinámica para obtener las ecuaciones que describen en sistema en

la forma de matrices de espacios de estado. Finalmente, se hace una reducción del modelo a través de un cambio de coordenadas nodales, a coordenadas modales, usando los vectores propios del sistema, obtenidos con un análisis modal de elementos finitos. La forma final de las ecuaciones convertidas a un modelo de espacios de estado es:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{K}_{vm} & -\mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{D}_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{K}_{wm} \end{bmatrix} \phi_{ea} \quad (3)$$

$$\phi_{es} = \begin{bmatrix} -\mathbf{H}_{ss}^{-1} \mathbf{H}_{su} \mathbf{\Phi} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{H}_{ss}^{-1} \mathbf{H}_{sa} \end{bmatrix} \phi_{ea} \quad (4)$$

Donde η es el desplazamiento modal, $\{\eta \dot{\eta}\}^T$ es el vector de variables de estado, ϕ_{ea} es la acción de control, ϕ_{es} es la salida del sistema, y los términos entre corchetes son las matrices de estado \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} y \mathbf{D} .

En el diseño de sistemas de control activo no siempre es posible encontrar una ley de control que cause los efectos deseados. Esa inhabilidad de encontrar las leyes de control correctas plantea el concepto de *Controlabilidad* y *Observabilidad* [3]. La controlabilidad mide la habilidad de una configuración particular de actuadores de controlar todos los estados de un sistema. De forma similar, la observabilidad mide la habilidad de una configuración particular de sensores de suministrar la información necesaria para estimar todos los estados del sistema. Sin embargo, en problemas prácticos de ingeniería, esta información generalmente no es suficiente, ya que se necesita información más cuantitativa que simplemente afirmar o negar la existencia de controlabilidad y observabilidad [4]. Para determinar el grado de control y observación, se introduce el concepto de *Gramiano de Controlabilidad* y *Gramiano de Observabilidad* [3], definidos como:

$$\mathbf{W}_c = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t} dt \quad \mathbf{W}_o = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} dt \quad (5)$$

Donde \mathbf{W}_c es el gramiano de controlabilidad, \mathbf{W}_o es el gramiano de observabilidad, \mathbf{A} , \mathbf{B} , y \mathbf{C} son las matrices de estado. Para sistemas asintóticamente estables, estos gramianos son una solución de ecuación de Lyapunov [6], de forma que cumplen la relación:

$$\mathbf{A} \mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{B}^T = \mathbf{0} \quad \mathbf{A}^T \mathbf{W}_o + \mathbf{W}_o \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (6)$$

Estas últimas ecuaciones son fundamentales en la formulación del problema de optimización y el análisis de sensibilidades, los cuales serán descritos en la siguiente sección a partir de estas expresiones.

En el problema de ubicar actuadores para el control activo de vibraciones se desea minimizar la energía de control requerida para llevar el sistema a un estado deseado en cierto tiempo [6]. Esto se puede lograr considerando un problema de optimización, aunque involucra la correcta elección de un índice de rendimiento [3]. Una función de rendimiento que tiene aplicación específica en el control activo de vibraciones es llamada un *Problema de Regulador Lineal*, en el cual, el problema consiste en llevar todos los estados a su posición de equilibrio minimizando las vibraciones en una estructura [3]. El índice de rendimiento de este problema es:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{q}^T \mathbf{R} \mathbf{q} dt \quad (7)$$

Donde \mathbf{Q} y \mathbf{R} son matrices simétricas positivas definidas, llamadas matrices de pesos, \mathbf{x} es el vector de estados, y \mathbf{q} es el vector de entradas. Mientras más grandes sean los coeficientes de la matriz \mathbf{Q} , más énfasis estará puesto en llevar todos los estados a cero. Mientras más grandes sean los coeficientes de la matriz \mathbf{R} , más énfasis estará puesto en reducir la cantidad de energía del esfuerzo de control [3]. La solución para este problema de optimización es [18]:

$$\mathbf{q}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{S}(t) \mathbf{x}^*(t) \quad (8)$$

Donde $\mathbf{q}^*(t)$ es el vector de entradas óptimo, \mathbf{x} es el vector de estados óptimo, y $\mathbf{S}(t)$ es la matriz solución de la ecuación de *Riccati*, que en estado estable no dependerá del tiempo [3].

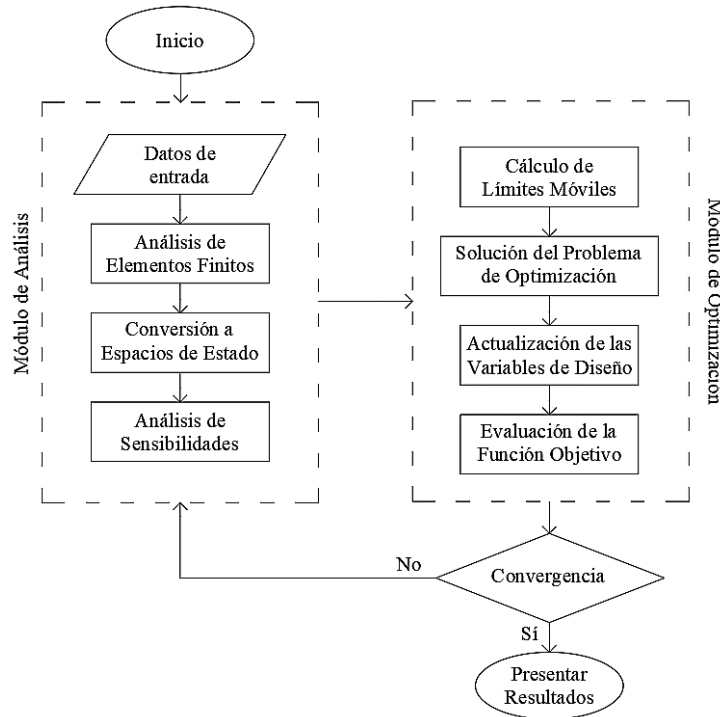


FIGURA 1. ALGORITMO DE OPTIMIZACIÓN TOPOLÓGICA APLICADO.

2.3 Optimización Topológica

El Método de Optimización Topológica (MOT) es una herramienta computacional de diseño conceptual para encontrar topologías óptimas de estructuras y es referido como *optimización generalizada de forma* [19]. El MOT tiene en esencia dos módulos: análisis y optimización. En el módulo de análisis se calcula la respuesta estructural y su sensibilidad al cambio de las variables de diseño. En el módulo de optimización se realizan las iteraciones para actualizar las variables de diseño con base en la información obtenida del módulo de análisis [20]. En la Figura 1 se presenta un algoritmo simplificado del programa de optimización topológica implementado en este trabajo.

Existen dos conceptos fundamentales en el MOT: (a) Dominio de diseño fijo, que se refiere al espacio que la estructura tendrá permitido ocupar, y (b) Modelo de interpolación de material que es una regularización que incluye restricciones a la formulación del problema de optimización e introduce las variables de diseño discretas como variables continuas [19]. En este trabajo, el modelo de interpolación de material usado está basado en densidades y se le conoce como SIMP. Este modelo de material es una ley matemática, también llamada “Ley de Potencias”, que define el material en cada punto del dominio de diseño fijo [13] introduciendo una variable continua $\rho(x)$ tal que $0 < \rho(x) < 1$ representando la pseudo-densidad del material y es aplicada como factor de interpolación en la definición de las propiedades del material, de forma que [21]:

$$E_{ijkl}(x) = \rho(x)^p E_{ijkl}^0 \quad V = \int_{\Omega} \rho(x) dx \quad (9)$$

Donde E_{ijkl} es el tensor de propiedades en equilibrio, y V el volumen del dominio de diseño. La variable continua $\rho(x)$ es introducida a las propiedades del material usando las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \bar{c} &= \rho^{p_1} c^E & \bar{e} &= \rho^{p_3} e^S \\ \bar{e} &= \rho^{p_2} e & \bar{\rho} &= \rho^{p_4} \rho_{mat} \end{aligned} \quad (10)$$

Donde p_1 , p_2 , p_3 , y p_4 son los coeficientes de penalización del modelo SIMP. Adicionalmente, es implementado un filtro de proyección [22], cuyo propósito es usar variables de diseño “auxiliares” que se proyectan a un espacio solución para evaluar el modelo físico del problema usando funciones de proyección no lineales, logrando eliminar la escala de grises y la independencia de la malla [23]. La función de proyección debe ser regularizada, de forma

que el gradiente de la variable de diseño auxiliar ($\tilde{\rho}_e$) con respecto a la variable de diseño original (ρ), sea continuo. Esto se puede lograr con la función exponencial [24]:

$$\tilde{\rho}_e = 1 - e^{-\beta\tilde{\rho}_e} + \tilde{\rho}_e e^{-\beta} \quad (11)$$

Donde $\tilde{\rho}_e$ es la pseudo-densidad filtrada y penalizada por β , que es un factor de penalización del filtro. El problema de optimización consiste en encontrar la distribución de material piezoeléctrico sobre una estructura elástica para maximizar el control a las vibraciones que experimente dicha estructura. Para resolver este problema, se proponen dos funciones objetivo que son optimizadas de forma paralela y luego sus resultados son concatenados como solución a un problema global de optimización. La primera función objetivo busca maximizar el gramiano de controlabilidad, mientras la segunda busca maximizar el gramiano de observabilidad del sistema. Sin embargo, ambos gramianos son expresiones matriciales cuya dimensión depende de la cantidad de estados de control definidos en la conversión de elementos finitos a modelos en espacios de estado. Ya que los gramianos son matrices predominantemente diagonales [13], el criterio de optimización se define como la traza de las matrices de los gramianos. Es la forma canónica, esto se escribe:

$$\begin{aligned} \max_{\rho_c} \quad & \text{trace}(W_c) & \max_{\rho_o} \quad & \text{trace}(W_o) \\ \text{s.t.} \quad & \int_{\Omega_c} \rho_c d\Omega_c - V_r \leq 0, \quad 0 \leq \rho_c \leq 1 & \text{s.t.} \quad & \int_{\Omega_o} \rho_o d\Omega_o - V_r \leq 0, \quad 0 \leq \rho_o \leq 1 \end{aligned} \quad (12)$$

Donde W_c y W_o son respectivamente las matrices del gramiano de controlabilidad y el gramiano de observabilidad, ρ_c es la variable de diseño para el dominio del actuador Ω_c , ρ_o es la variable de diseño para el dominio del sensor Ω_o , y V_r es la restricción de volumen.

Finalmente, es necesario el cálculo de la sensibilidad de las funciones objetivo ya que el problema de optimización en este trabajo se resuelve utilizando la técnica de Programación Lineal Secuencial (PLS), la cual requiere los término de primer orden de la serie de Taylor [25]. Un problema de optimización algunas veces podría tener soluciones ilimitadas, debido a esto, es necesario introducir límites para asegurar la solución al problema agregando unas restricciones llamadas *límites móviles* [26]. El análisis de sensibilidad para las funciones objetivo presentadas requiere la derivada de la ecuación de Lyapunov, esta es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho_i} (AW_c + W_c A^T + BB^T) &= A \frac{\partial W_c}{\partial \rho_i} + \frac{\partial W_c}{\partial \rho_i} A^T + \frac{\partial A}{\partial \rho_i} W_c + W_c \frac{\partial A^T}{\partial \rho_i} + \frac{\partial B}{\partial \rho_i} B^T + B \frac{\partial B^T}{\partial \rho_i} \\ \frac{\partial}{\partial \rho_i} (A^T W_o + W_o A + C^T C) &= A^T \frac{\partial W_o}{\partial \rho_i} + \frac{\partial W_o}{\partial \rho_i} A + \frac{\partial A^T}{\partial \rho_i} W_o + W_o \frac{\partial A}{\partial \rho_i} + \frac{\partial C^T}{\partial \rho_i} C + C^T \frac{\partial C}{\partial \rho_i} \end{aligned} \quad (13)$$

Las ecuaciones anteriores tienen la misma estructura que la ecuación de Lyapunov de la forma [14]:

$$AX + XA^T + Q = 0 \quad A^T Y + YA + R = 0 \quad (14)$$

Donde X es la derivada del gramiano de controlabilidad, Y es la derivada del gramiano de observabilidad, Q y R son los últimos cuatro términos de cada ecuación. Así, la estructura resultante es nuevamente una ecuación de Lyapunov, que al resolverla se obtiene la derivada del gramiano de controlabilidad u observabilidad y, por ende, la sensibilidad de las funciones objetivo.

3 ANÁLISIS Y RESULTADOS

3.1 Análisis de convergencia.

En la Figura 2 se presenta como caso de estudio una estructura tipo sándwich de 800×120×9 mm en *Cantilever*, compuesta por tres capas de 3 mm: actuador, material elástico, y sensor. La discretización usada para modelar esta estructura es una malla de 20×3×3 elementos finitos hexaédricos de 20 nodos, para una total de 180 elementos con 4556 grados de libertad, 3480 de ellos desplazamientos y 1076 voltajes.

El problema de optimización es configurado con una restricción de volumen máxima de 50% y mínima de 20%, los coeficientes de penalización del modelo SIMP son $p_1=3$, $p_2=2$, $p_3=2$, $p_4=3$, y el filtro de proyección tiene un $\beta=10$ y un radio $r_{\max}=80$. En la Figura 3 se presentan las topologías óptimas encontradas para el actuador y el

sensor piezoeléctrico junto con la evolución de las funciones objetivo respectivamente de controlabilidad y observabilidad. Las topologías encontradas se presentan como vista superior de la estructura en una escala de grises que representan la pseudo-densidad del material piezoeléctrico, siendo el color más oscuro la presencia de material ($\rho=1$), y el color más claro la ausencia de este ($\rho=0$). Las zonas que tienen un color intermedio entre negro y blanco representan zonas donde el material no ha sido completamente definido por la optimización y se les realiza un post procesamiento para determinar el valor de densidad definitivo que deben tomar.

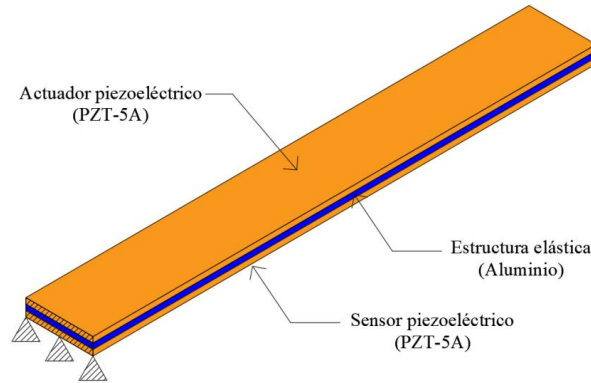


Figura 2. Caso de estudio: estructura de sensores y actuadores para control de vibraciones

La topología mostrada en la Figura 3 es simulada en un esquema de control óptimo LQG implementado en Simulink. Para evaluar los resultados, se presentan las curvas de comparación entre una configuración de sensores y actuadores sin optimización topológica (como se muestra en la Figura 2) y la topología encontrada (Figura 3). Esta comparación se realiza sobre el esfuerzo de control, la salida del sensor, la reconstrucción modal a partir del estimador de estados, y la vibración en un punto crítico de la estructura

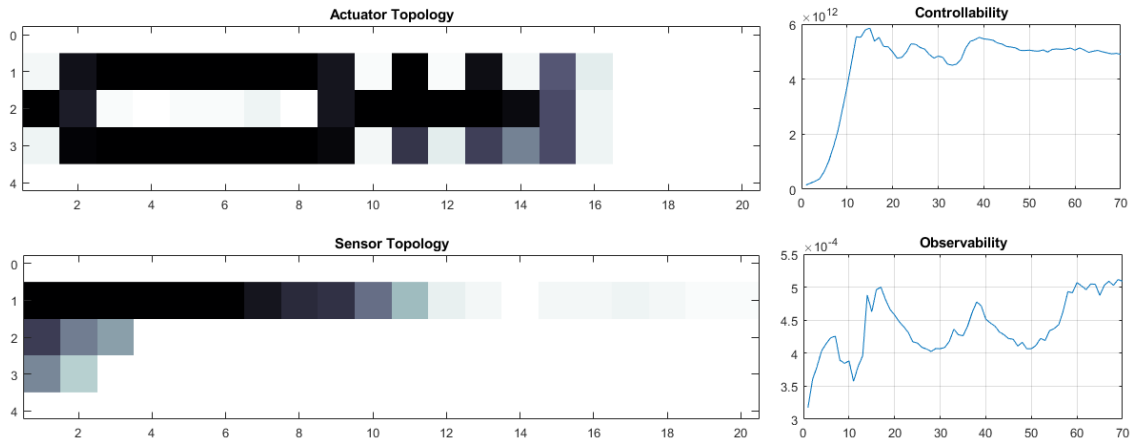


Figura 3. Topologías óptimas para actuador y sensor (sección izquierda). evolución de funciones objetivo para controlabilidad y observabilidad (sección derecha) durante 70 iteraciones

La Figura 4 muestra que el esfuerzo de control optimizado tiene sobre impulsos hasta 55% menores en los primeros instantes de tiempo, donde el sistema sin optimización tiene grandes picos de energía. De forma similar, la Figura 5 muestra en el sensor niveles de voltaje hasta 64% superiores en la configuración optimizada, lo que sugiere mejor sensibilidad de medición a las perturbaciones ya que entrega más energía. Por otra parte, la Figura 6 muestra que el comportamiento modal del sistema (superposición de modos) luego de un segundo, es similar en ambos casos, y de nuevo, la respuesta modal sin optimizar tiene sobre picos mayores en los primeros instantes de tiempo, esta vez con una relación del 66%.

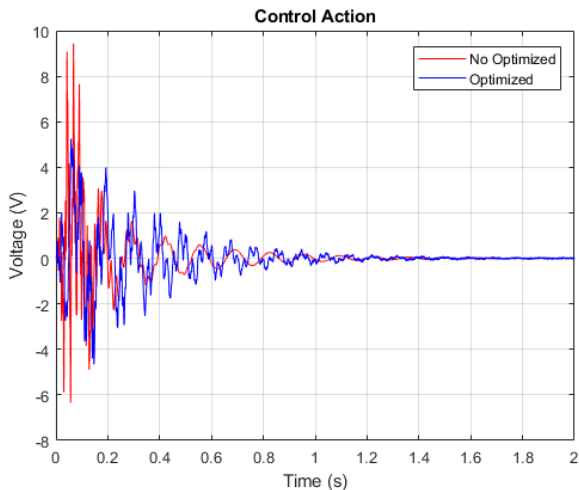


Figura 4. Comparación del esfuerzo de control sin optimización (rojo), y con optimización (azul).

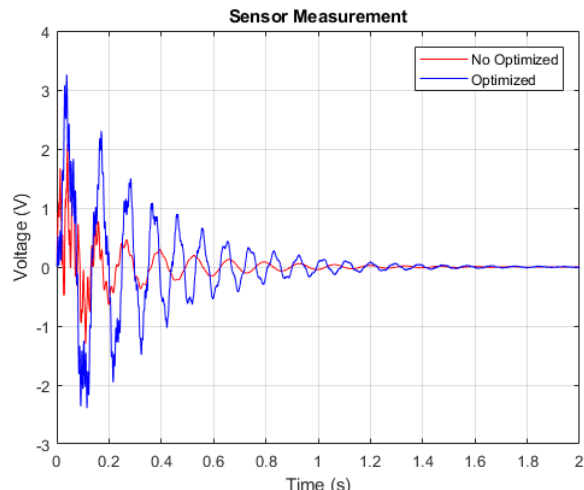


Figura 5. Comparación de la salida del sensor sin optimización (rojo), y con optimización (azul).

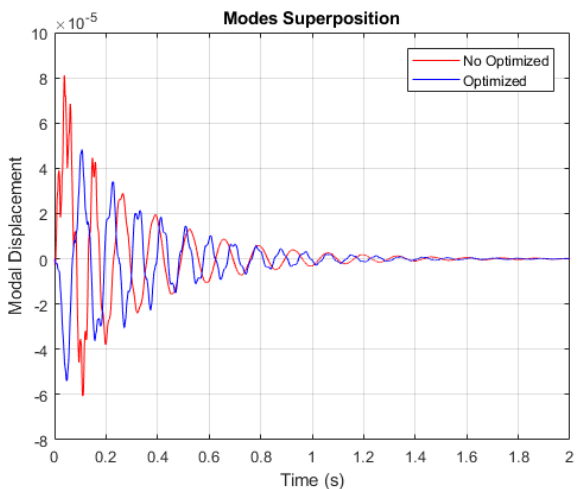


Figura 6. Comparación del desplazamiento modal sin optimización (rojo), y con optimización (azul).

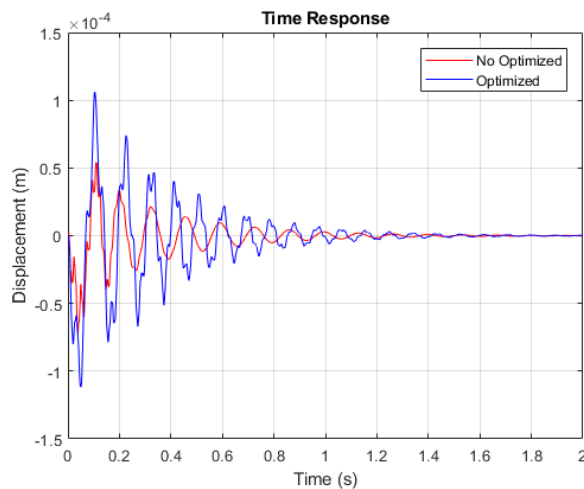


Figura 7. Comparación de la vibración en la estructura sin optimización (rojo), y con optimización (azul).

Por último, la Figura 7 representa el desplazamiento en la dirección z (vertical) de un punto en el borde la placa vibrando. En esta figura se muestra un desplazamiento mayor en el sistema sin optimizar, con diferencias máximas entre picos de hasta 65%. Aunque este resultado parece contraintuitivo, el comportamiento se debe a la reducción significativa de rigidez estructural que sufre el sistema optimizado al retirar material piezoeléctrico en el proceso de optimización. Sin embargo, al paso del tiempo la vibración de la estructura óptima se reduce hasta igualar la respuesta de la estructura no óptima, lo que sugiere un aumento en el amortiguamiento del sistema estructura-control.

Debido al comportamiento de las curvas presentadas, es necesario analizar la energía de las señales y la relación de amortiguamiento (Z) para concluir acerca del efecto de la optimización topológica en el control de vibraciones. La Tabla 1 presenta las medidas de energía de cada señal. Además, se incluye el cálculo del amortiguamiento modal y nodal del sistema, presentado en las figuras 6 y 7 respectivamente.

TABLA 1. COMPARACIÓN ENERGÉTICA DEL SISTEMA DE CONTROL

| CONFIGURACIÓN | ENERGÍA DE CONTROL (Figura 4) | ENERGÍA DE SENSOR (Figura 5) | ENERGÍA MODAL (Figura 6) | ENERGÍA DE VIBRACIÓN (Figura 7) | AMORTIGUAMIENTO MODAL (ζ_m) (Figura 6) | AMORTIGUAMIENTO NODAL (ζ) (Figura 7) |
|------------------|----------------------------------|---------------------------------|-----------------------------|------------------------------------|---|---|
| Sin Optimización | 4259,4 | 283,34 | 8,979e-07 | 7,133e-07 | 0,34892 | 0,34881 |
| Con Optimización | 2849,5 | 1262,1 | 4,487e-07 | 1,976e-06 | 0,47995 | 0,48178 |

Como se observa en el análisis energético de la Tabla 1, la distribución de transductores con optimización topológica requiere un consumo de energía 33,1% menor en la acción de control, y un aumento de voltaje en salida del sensor de 77,6%. Por otra parte, aunque se registra 49,9% menos energía modal, aumentó en 36,1% la energía de vibración en un punto crítico de la estructura. Sin embargo, las relaciones de amortiguamiento modal y nodal muestran un incremento cercano al 27% en ambos casos. Estos datos indican que la estructura activa necesita menos energía para obtener un control estructural que es más eficiente para disipar energía de vibración, mientras la salida del sensor es mayor lo que facilita la instrumentación electrónica debido al aumento del rengo dinámico en la señal medida. Todo esto en simultáneo con una reducción de material en el actuador de 50% y una reducción en el material del sensor de 80% (ver Figura 3).

CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

Una estructura activa compuesta por un actuador y un sensor piezoeléctrico fue diseñada con el software implementado para la distribución de estos transductores usando el método de optimización topológica. El modelo de la estructura se realiza con el método de los elementos finitos y luego es convertido a un modelo en espacios de estado, que finalmente es simulado bajo un esquema de control óptimo en el cual se pudo observar un incremento en el amortiguamiento del sistema plata-controlador, mientras se redujo la energía necesaria en la acción de control y se aumentó la salida del sensor. La optimización topológica encuentra una disminución del 50% de material piezoeléctrico en el actuador, y una reducción del 80% en el material del sensor mientras se maximizaba el grado de controlabilidad y el grado de observabilidad a través de la traza de las matrices de los gramianos.

La metodología de diseño de posición y forma de una configuración de actuadores y sensores para control activo de vibraciones usando el método de optimización topológica muestra resultados positivos en todos los criterios de análisis presentados y demuestra su fortaleza en la búsqueda sistemática de soluciones para problemas complejos en ingeniería donde la topología de estructuras juega un papel importante en el rendimiento del sistema, y problemas donde no siempre será intuitiva la solución para el diseñador.

REFERENCIAS

- [1] S. S. Rao, *Mechanical vibrations*, vol. 5. Prentice Hall Upper Saddle River, 2011.
- [2] A. Preumont and K. Seto, *Active control of structures*. John Wiley & Sons, 2008.
- [3] D. J. Inman, *Vibration with control*. John Wiley & Sons, 2006.
- [4] A. Preumont, *Vibration Control of Active Structures*, 3th ed., vol. 179. Bruxelles: Springer, 2011.
- [5] S. O. R. Moheimani and A. J. Fleming, *Piezoelectric transducers for vibration control and damping*. Springer, 2006.
- [6] A. Hać and L. Liu, "Sensor and actuator location in motion control of flexible structures," *J. Sound Vib.*, vol. 167, no. 2, pp. 239–261, 1993.
- [7] R. Alkhatib and M. F. Golnaraghi, "Active structural vibration control: a review," *Shock Vib. Dig.*, vol. 35, no. 5, p. 367, 2003.
- [8] K. Hiramoto, H. Doki, and G. Obinata, "Optimal Sensor/Actuator Placement for Active Vibration Control Using Explicit Solution of Algebraic Riccati Equation," *J. Sound Vib.*, vol. 229, no. 5, pp. 1057–1075, 2000.
- [9] M. Güneş and E. Eskinat, "Optimal actuator and sensor placement in flexible structures using closed-loop criteria," *J. Sound Vib.*, vol. 312, no. 1–2, pp. 210–233, 2008.
- [10] K. D. Dhuri and P. Seshu, "Multi-objective optimization of piezo actuator placement and sizing using genetic algorithm," *J. Sound Vib.*, vol. 323, no. 3–5, pp. 495–514, 2009.
- [11] X. Zhang and Z. Kang, "Dynamic topology optimization of piezoelectric structures with active control for reducing transient response," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 281, no. 1, pp. 200–219, 2014.
- [12] J. Hu, X. Zhang, and Z. Kang, "Layout design of piezoelectric patches in structural linear quadratic regulator optimal control using topology optimization," *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, p. 1045389X18758178, 2018.
- [13] O. A. A. da Silveira, "Projeto simultâneo de otimização topológica e controle para redução de vibrações utilizando material piezoeléctrico," Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2012.
- [14] O. Menuzzi, J. S. O. Fonseca, E. A. Perondi, J. F. Gonçalves, E. Padoin, and O. A. A. Silveira, "Piezoelectric sensor location by the observability Gramian maximization using topology optimization," *Comput. Appl. Math.*, pp. 1–16, 2017.
- [15] V. Piefort, "Finite Element Modelling of Piezoelectric Active Structures," Université Libre de Bruxelles, 2001.
- [16] A. Meitzler, H. F. Tiersten, A. W. Warner, D. Berlincourt, G. A. Couquin, and F. S. Welsh III, "IEEE standard on piezoelectricity." Society, 1988.
- [17] G. Nader, "Desenvolvimento de técnicas de caracterização de transdutores piezoeléctricos," Universidade de São Paulo, 2002.

- [18] D. E. Kirk, *Optimal control theory: an introduction*. Courier Corporation, 2012.
- [19] H. A. Eschenauer and N. Olhoff, "Topology optimization of continuum structures: a review," *Appl. Mech. Rev.*, vol. 54, no. 4, pp. 331–390, 2001.
- [20] W. Montealegre, "Projeto de" MEMS" eletrotermomecânicos usando o método de otimização topológica," Universidade de São Paulo (USP). Escola Politécnica, 2005.
- [21] M. P. Bendsøe and O. Sigmund, "Material interpolation schemes in topology optimization," *Arch. Appl. Mech.*, vol. 69, no. 9–10, pp. 635–654, 1999.
- [22] J. K. Guest, J. H. Prévost, and T. Belytschko, "Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 61, no. 2, pp. 238–254, 2004.
- [23] D. Berrío, "Optimización topológica de un instrumento musical idiófono tipo metalófono," Universidad Nacional de Colombia, 2017.
- [24] S. Xu, Y. Cai, and G. Cheng, "Volume preserving nonlinear density filter based on heaviside functions," *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 41, no. 4, pp. 495–505, 2010.
- [25] S. S. Rao, *Engineering optimization: theory and practice*. John Wiley & Sons, 2009.
- [26] R. T. Haftka and Z. Gürdal, *Elements of structural optimization*, vol. 11. Springer Science & Business Media, 2012.
- [27] H. S. Tzou and C. I. Tseng, "Distributed vibration control and identification of coupled elastic/piezoelectric systems: finite element formulation and applications," *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 5, no. 3, pp. 215–231, 1991.
- [28] V. Piefort, "Finite Element Modelling of Piezoelectric Active Structures," Université Libre de Bruxelles, 2001.
- [29] W. S. Hwang and H. C. Park, "Finite element modeling of piezoelectric sensors and actuators," *AIAA J.*, vol. 5, no. 31, pp. 930–937, 1993.
- [30] Z. Lašová and R. Zemčík, "Comparison of finite element models for piezoelectric materials," *Procedia Eng.*, vol. 48, pp. 375–380, 2012.