

UN MODELO ESTOCASTICO DE FLIP-FLOP

Por: Holmes Ripoll Goenaga
Dario Perdomo Fontalvo

Departamento de Física Universidad de Antioquia
Profesores Instituto Tecnológico Pascual Bravo
Metodología Semipresencial

INTRODUCCION

El estudio de los procesos estocásticos, es una teoría útil en el diseño de modelos físicos que presentan grados variables de aleatoriedad. El presente trabajo estudiará el comportamiento estadístico de un modelo probabilístico de flip-flop, bajo hipótesis de ergodicidad y estacionaridad asintótica del proceso.

El proceso estocástico de flip-flop propuesto está definido así: Para cada t se define la variable aleatoria $\chi(t) = \chi(0) (-1)^{N(t)}$ donde $\chi(0)$ es una variable aleatoria que toma los valores $+1$ y -1 independientemente de $N(t)$, $t > 0$, donde $N(t)$ es un conteo homogéneo de Poisson.

O sea, para cada punto muestra ω del espacio muestral Ω , $t \rightarrow \chi(t, \omega)$ es una función que sube de -1 a $+1$ y cae de $+1$ a -1 ; como se muestra (ver figura 1).

Supongamos que la probabilidad de que la variable aleatoria $\chi(0)$ tome el valor $+1$ es $\Pr[\chi(0) = 1] = p$. Así la probabilidad del proceso $\Pr[\chi(t) = 1]$, $t > 0$ está dada por:

$$\Pr[\chi(t) = 1] = \frac{1}{2} + (p - \frac{1}{2}) \exp - 2\lambda t$$

Donde λ es el número promedio de pulsos en un intervalo unidad.

$$E[N(t + \tau) - N(t)] = \lambda \tau$$

El valor esperado del proceso se obtiene para un tiempo arbitrario evaluando

$$E[\chi(t)] = (2p - 1) \exp - 2\lambda t$$

La función de autocorrelación está dada por:

$$T_{\chi\chi}(\tau) = (2p - 1)^2 \exp - 2\lambda |\tau|$$

La densidad de potencia espectral, es calculada aplicando el teorema de WIENER-KHINCHIN:

$$\Theta_{\chi\chi}(\nu) = (2p - 1) \cdot 1/\lambda \cdot [1 + (\pi\nu/\lambda)^2]^{-1}$$

COMENTARIO

Para fluctuaciones muy rápidas (altas frecuencias), el proceso presenta un intervalo de frecuencias $-\nu_0 < \nu < \nu_0$ donde la energía/modo presenta su máxima contribución. Pero estas contribuciones son debidas a fluctuaciones lentas (bajas frecuencias), o sea es en esta región de bajas frecuencias donde se tiene la máxima contribución de energía. Luego, el comportamiento del Flip-Flop es el de un típico filtro pasabandas. El parámetro λ se puede interpretar como el ANCHO DE BANDA del proceso. Es claro que el tiempo de muestra juega un papel fundamental en el proceso. Los resultados obtenidos son graficados y de fácil lectura (ver figura 1)

Nosotros realizamos un modelo simple y con algún tipo de restricción en el software de instrumentación gráfico LABview, pero la idea básica se mantiene. El modelo utilizado es básicamente la implementación de la variable aleatoria $\chi(0)$, su diseño y simulación se muestran (ver figura 2).

C

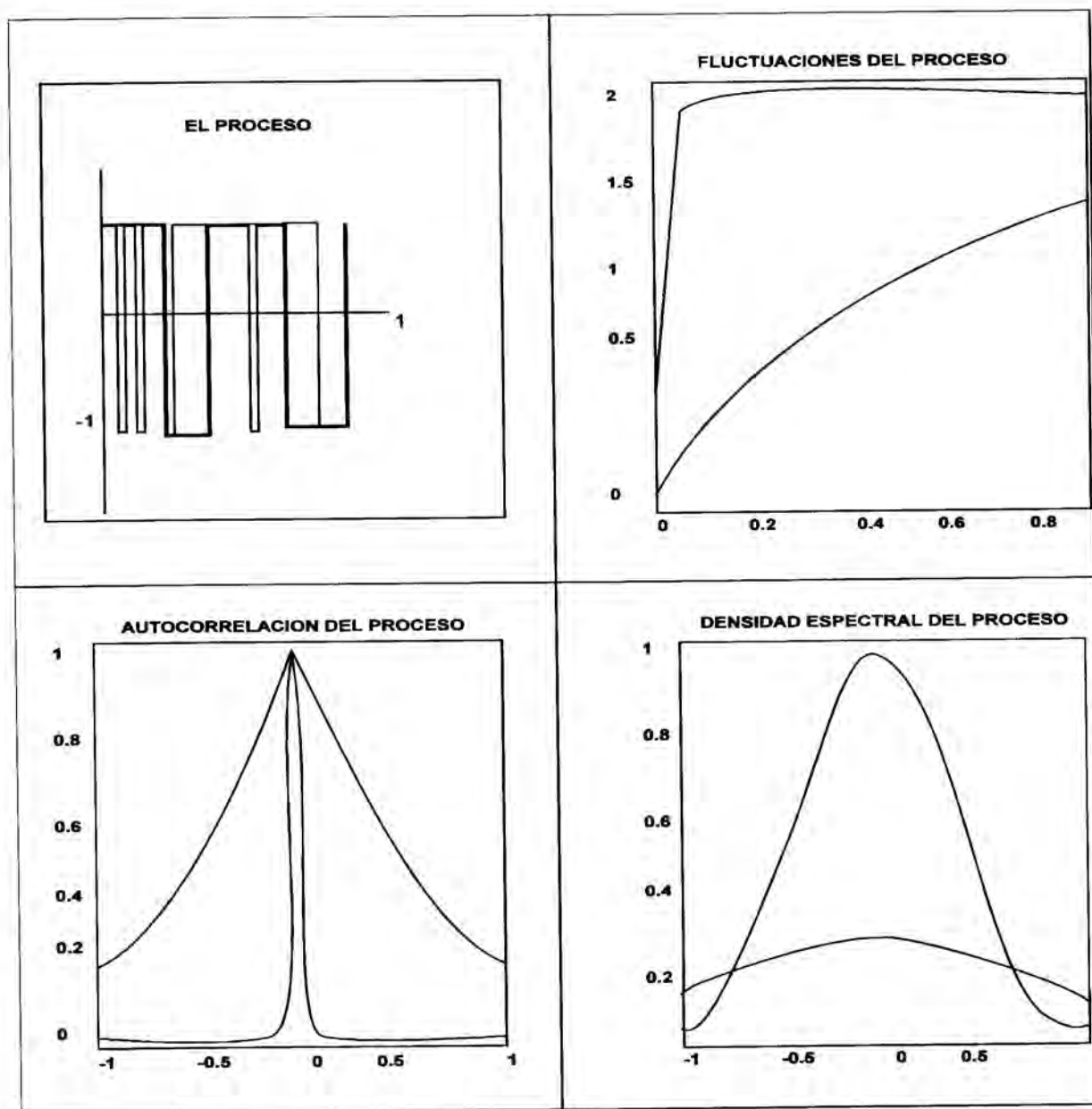


FIGURA 1

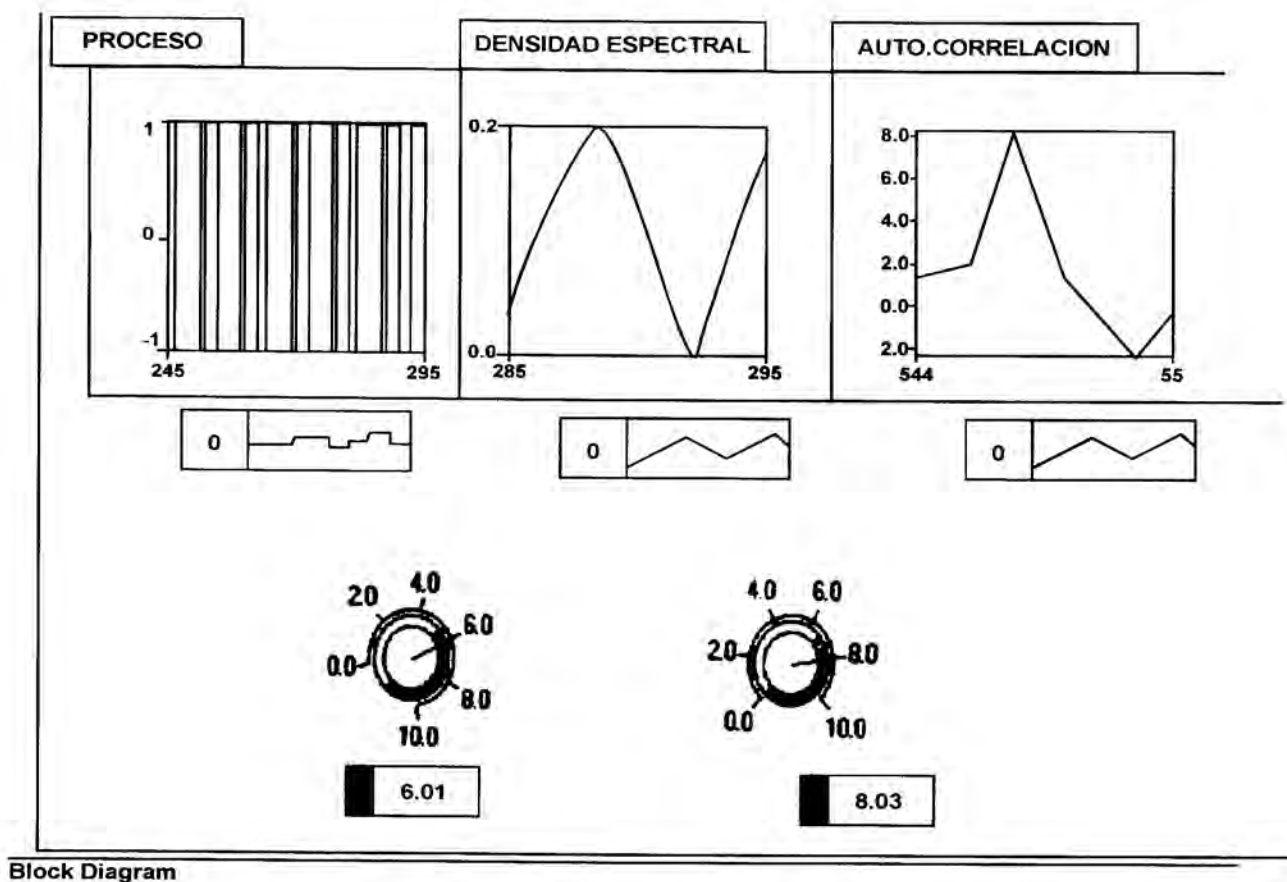


FIGURA 2

APENDICE

PROBABILIDAD

Probabilidad es un número que se le asigna a un conjunto con el ánimo de medirlo en cierto sentido. La probabilidad es una función de conjuntos.

$$\text{Pr}: S \rightarrow \text{Pr}(S)$$

ESPACIO MUESTRAL

El espacio muestral está formado por cierto número de puntos muestrales y no es sino el nombre que recibe la totalidad o reunión de todos ellos.

CONTEO DE POISSON

Un conteo de Poisson puede ser descrito por una secuencia de pulsos $\{\Sigma \delta(t - t_k)\}$, el proceso asociado es la familia de n valores de la variable aleatoria $N(t)$.

DISTRIBUCION DE POISSON

La probabilidad de tener n pulsos en un intervalo de longitud t obedece a una distribución de Poisson.

$$P_n(t) = (\lambda t)^n \cdot \exp(-\lambda t) \cdot (n!)^{-1}$$

PROCESO HOMOGENEO DE POISSON

Sea $p_n(t) = \text{Pr}[N(t) = n]$, probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor entero en un tiempo t . Un proceso homogéneo de Poisson tiene las siguientes características:

- a) $p_n(t_a - t_b), P_m(t_c - t_d)$
- b) $p_1(\Delta t) = \lambda \Delta t$
- c) $p_0(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t$

TEOREMA DE WIENER-KHINCHIN

$$\Theta_{xx}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} T_{xx}(\tau) \exp 2\pi i \nu \tau d\tau$$

VALOR ESPERADO

$$E[\chi(\omega)] = \sum_{\omega} \chi(\omega) \cdot p(\omega); \omega \in \Omega; p: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

AUTOCORRELACION

$$T_{xx}(t^1, t^2) = E[\chi(t^1) \chi(t^2)]$$

FLUCTUACION CUADRATICA MEDIA

$$E[\{\chi(t) - \chi(t + \tau)\}^2] = 2(T_{xx}(0) - T_{xx}(\tau))$$

PROCESO ERGODICO

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T |\chi(t, \omega)|^2 dt = E[|\chi(t)|^2]$$

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos las sugerencias realizadas por el Dr. Román Castañeda a estas notas

BIBLIOGRAFIA

Franks, L.E., Signal Theory, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.

Parzen, E. Procesos Estocásticos. Paraninfo, Madrid, 1972

Hsu, H.P. Análisis de Fourier. Fondo Educativo Interamericano S.A., México, 1973

LabVIEW SOFTWARE for Windows. National Instrument.