

TECNOLOGÍA

CINÉTICA DE CUERPO RÍGIDO

- Solisabel Orozco

Ana Catherine Serna

sorozco@unimed.edu.co

acserna@unimed.edu.co

Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín

Colombia

TEL: 430 90 00

Autopista Norte, Medellín

Resumen

Se desea encontrar la velocidad angular de un péndulo cuando llega a una posición vertical si se sabe que parte del reposo en posición horizontal. El péndulo consta de un disco y una barra, en el centro de masa de esta última está sujeto un resorte que le hace una fuerza de tracción a medida que el sistema gira alrededor de un punto fijo ubicado en el centro de masa del disco. Para esto se realizará un análisis matemático y una simulación.

Palabras Clave: trabajo, energía, simulación, velocidad angular, péndulo.

Abstract

It is needed to find the pendule angular velocity when it arrives to a vertical position, if it is known that it begins of rest in horizontal position. The pendule is formed by a disk and a bar in the center mass, from thi last one a spring is joined, it makes a traction strength while the sistem turns around afixed point located in the disk center mass. To realizad it, a math analises and a simulatio Hill be done.

Key words: jule, energy, simulation, angular velocity, penule.

INTRODUCCION

Con el objetivo de encontrar la solución a un problema cinético de cuerpo rígido se plantea la solución por dos métodos diferentes.

La idea es analizar el instante en que el péndulo se encuentra en posición vertical, se realizará de dos maneras diferentes: por simulación y de forma analítica.

En la simulación se pretende abordar el problema por medio del software working model, éste da la posibilidad de observar el comportamiento del sistema, bajo restricciones específicas, además permite obtener datos en situaciones específicas.

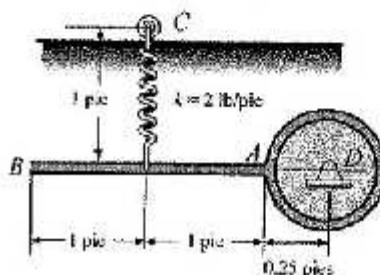
Para realizar el análisis es necesario entender el problema, escoger el método más adecuado para darle solución, y finalmente plantear y resolver las ecuaciones.

Y por último comparar estas dos soluciones y analizar los resultados.

PRESENTACION DEL PROBLEMA

El péndulo consta de una barra BA de 2lb y un disco de 6 lb. El resorte está estirado 0.3 pies cuando la barra se encuentra en posición horizontal como se muestra. Si el péndulo es liberado del reposo y gira con respecto al punto D, determine su velocidad angular en el instante en que la barra está en posición vertical. El rodillo colocado en C permite que el resorte permanezca vertical al caer la barra. (Hibbeler, 2004)

Figura 1. Representación del problema



Se pretende hacer el análisis de un sistema masa resorte, para esto se plantearán dos formas diferentes de encontrar la solución, la primera por medio de las ecuaciones de cinética de cuerpo rígido y la segunda se modelará el problema haciendo uso del Software Working Model.

Se tomará el péndulo como cuerpo rígido, porque el sistema consta de dos cuerpos, con centros de masa ubicados en diferentes puntos del sistema.

SOLUCION ANALITICA

Para darle solución al problema se debe:

1. Plantear el problema, para esto es necesario analizar los datos y las incógnitas para escoger el método más apropiado.

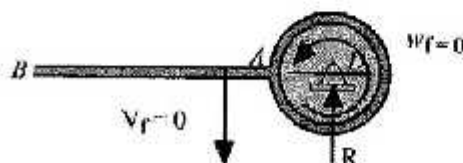
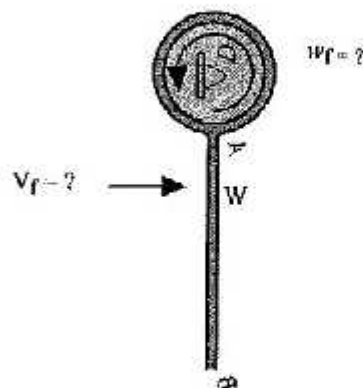
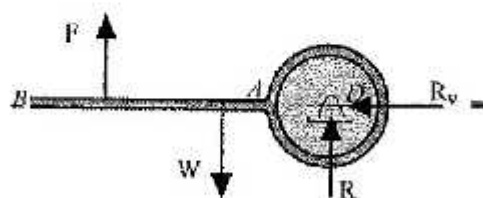
En este caso hay fuerzas, rotación y velocidades (lineales y angulares), de lo que se concluye que el mejor método es Trabajo y Energía, ya que reúne todas las variables del problema, en ecuaciones muy simples y fáciles de trabajar.

2. Realizar el diagrama cinético, dibujo donde se resumen las fuerzas y las velocidades del objeto al que se le pretende hacer el análisis.

En este problema se hace el diagrama cinético sobre el péndulo, pues es en este elemento donde se concentran todas las fuerzas e incógnitas, además es el que mayor información proporciona.

A continuación se presenta el diagrama cinético. Figura 2.

Figura 2. Diagrama cinético.



Sobre el péndulo actúan las siguientes fuerzas:

F es la fuerza elástica de tracción ejercida por el resorte.

Rx es la reacción en dirección del eje x de la articulación plana.

Ry es la reacción en dirección del eje y de la articulación plana.

W es el peso.

3. Analizar de forma independiente el trabajo de cada fuerza. Con la ecuación:

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \vec{f} \times d\vec{s} \quad (1)$$

Donde

$$\vec{f} \times d\vec{s} = f ds \cos \theta \quad (2)$$

θ es el ángulo entre la fuerza y el desplazamiento.

En general para el problema se tiene que:

Trabajo de R_x y R_y

Las reacciones de la articulación (R_x R_y) no realiza trabajo que no se desplazan.

Trabajo del resorte

Cuando se halla el trabajo del resorte no se habla de desplazamiento sino de deformación, también se debe tener en cuenta que la fuerza que hace el resorte es kx donde x es la deformación y k la constante elástica del resorte.

Para encontrar el trabajo del resorte se debe encontrar primero la longitud natural (L_n), según datos proporcionados por el problema, en la posición horizontal del péndulo el resorte está elongado 0.3 pies y la distancia entre C y el centro de masa de la barra es un pie (Fig. 1), de lo que se concluye que:

$$L_n = 0.7 \text{ pies}$$

Cuando el péndulo llega a la posición vertical el resorte se ha deformado 1.55pies y reemplazando en la ecuación 1 se obtiene el trabajo del resorte:

$$T_r = -2.31J$$

El trabajo es negativo porque el vector de desplazamiento forma un ángulo de 180° con la dirección de la fuerza.

Trabajo del peso

En el sistema hay dos centros de masa, para hacer el análisis es necesario encontrar uno general para lo que se hace uso de la siguiente fórmula:

$$X_w = \frac{\sum X_i m_i}{\sum m_i} \quad (3)$$

Donde x es cada distancia desde el punto B hasta los centros de masa de cada cuerpo, y m es la masa de cada uno.

Se reemplazan los siguientes datos en la fórmula (3)

$$M_{Barra} = 0.062 \text{ slugs}$$

$$M_{Disco} = 0.19 \text{ slugs}$$

$$X_{Barra} = 1 \text{ pies}$$

$$X_{Disco} = 2.25 \text{ pies}$$

Y se obtiene

$$X_w = 1.938 \text{ pies}$$

Cuando el péndulo está vertical el centro de masa se ha desplazado verticalmente 0.3125 pies. Reemplazando en la ecuación (1):

$$T_w = 2.5J$$

4. Plantear la ecuación de trabajo y energía (4) y despejar las incógnitas.

$$\sum \int_a^b \vec{f} \cdot d\vec{s} + \sum \int_a^b \vec{M} \cdot d\vec{\theta} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_f^2 - \frac{1}{2}I_G\omega_o^2 \quad (4)$$

Como el péndulo es soltado del reposo $v_i = 0$, por tanto $\omega_i = 0$.

Para hallar el I_G (momento de inercia respecto al centro de gravedad) primero se debe encontrar por separado I_o (momento de inercia de cada elemento respecto a su propio centro de masa) y luego desplazarlo al centro de gravedad total por medio del teorema de los ejes paralelos.

El I_o de la barra es diferente al I_o del disco, estos se pueden obtener con las siguientes fórmulas:

Momento de inercia del disco

$$I_o = \frac{3}{2}mr^2 \quad (5)$$

Si $m = 0.19 \text{ slugs}$ y $r = 0.25 \text{ pies}$

$$I_o = 0.0175$$

Momento de inercia de la barra

$$I_o = \frac{1}{12}ml^2 \quad (6)$$

$8 \text{ m} = 0.062 \text{ slugs}$ y $l = 2 \text{ pies}$

$$I_0 = 0.0207$$

Ahora se utiliza la ecuación 7 para desplazar los momentos de inercia y luego sumarlos.

$$I_G = I_0 + md^2 \quad (7)$$

Donde d es la distancia de cada centro de masa general y m la masa del respectivo elemento.

Sustituyendo en 7 para cada cuerpo se obtiene:

$$I_{GB} = 0.0753$$

$$I_{GD} = 0.0357$$

Sumando estos dos

$$I_G = 0.111$$

Se sabe que

$$v_G = \omega R \quad (8)$$

Donde R es la distancia del centro de gravedad general a D .

Reemplazando 8 y todos los resultados anteriormente obtenidos en cuatro se halla ω_f

Cuando el péndulo se encuentra en posición vertical

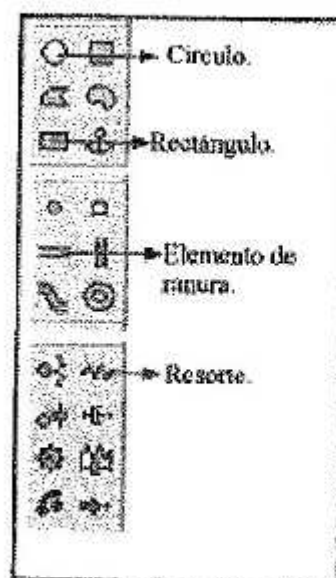
$$\omega_f = 1.66 \text{ rad/s}$$

SOLUCION POR SIMULACION

Para iniciar el análisis es necesario dibujar el problema con las especificaciones correspondientes; los pasos a seguir son:

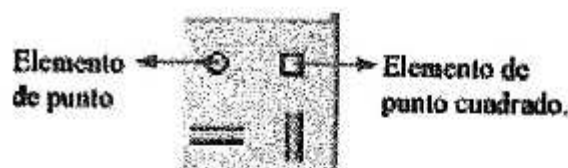
1. Dibujar cada elemento por separado. (Figura 3.)

Figura 3. Herramientas para dibujar el sistema



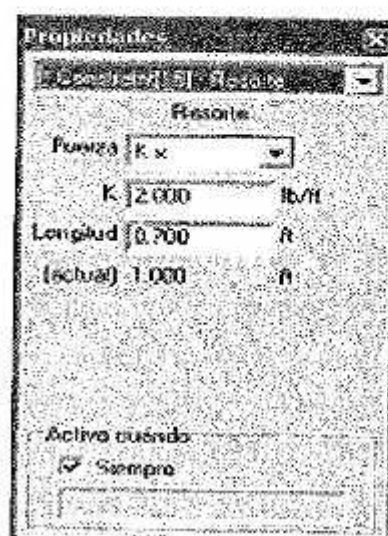
2. Unir la barra (rectángulo) y el disco (círculo) con el elemento de punto cuadrado, unir el disco por medio de la herramienta elemento de punto al espacio de trabajo, unir el rodillo (círculo) a la ranura por un elemento de punto.

Figura 4. Herramientas para unir el sistema.



3. El resorte se ubica con especificaciones dadas en el problema.

Figura 5. Propiedades del resorte



4. Se introduce la masa de la barra y del disco de manera separada, se quitan los coeficientes de fricción.

5. Se ajustan las propiedades del rodillo, ya que es despreciable, se deben quitar los coeficientes de fricción entre la ranura y el rodillo.

Figura 6. Propiedades de la barra

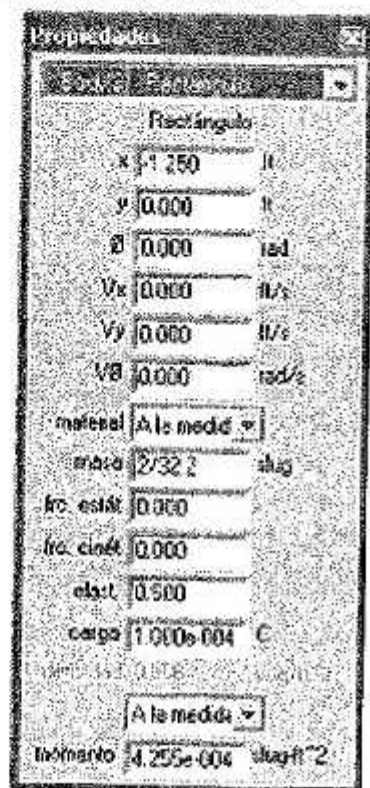


Figura 8. Propiedades del rodillo

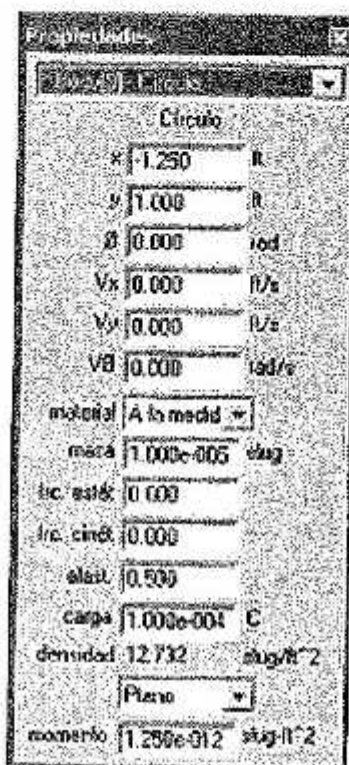
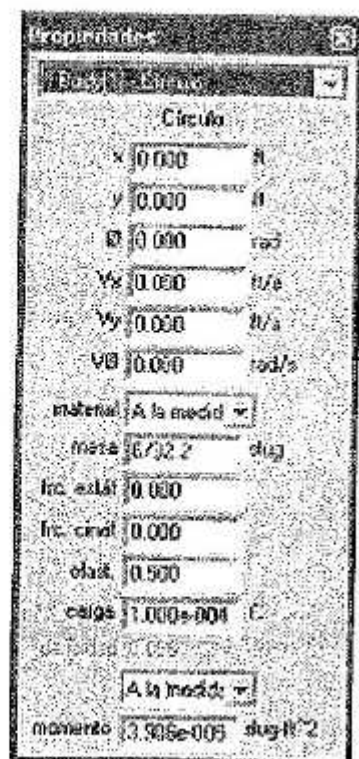


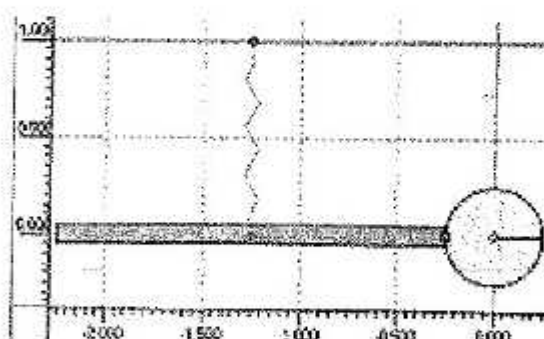
Figura 7. Propiedades del disco



6. Poner a correr la simulación.

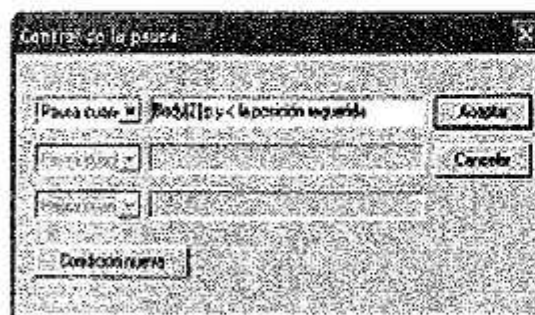
A continuación se puede observar el sistema definido en el programa (Figura 9).

Figura 9. Simulación



Luego de tener el problema simulado se puede interactuar con el programa y darle límites a unos parámetros específicos de modo que se obtengan los datos en instantes determinados (Posiciones, Velocidades, Tiempos, etc.).

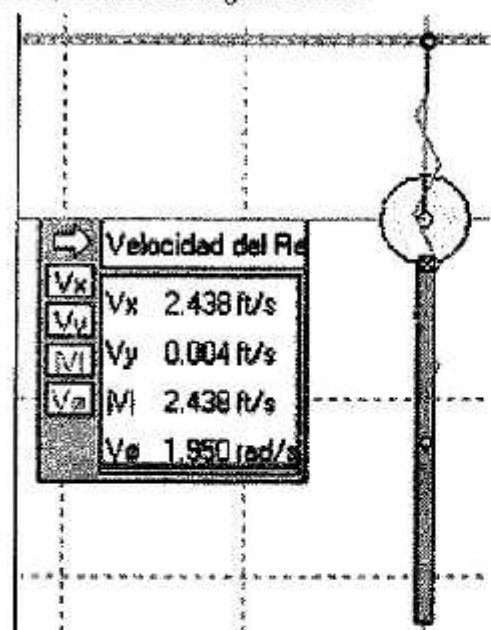
Para que el Working arroje los resultados del ejercicio se le dan restricciones, de modo que haga una pausa en las posiciones que el problema da, además se le indica que mida y muestre la velocidad angular en estos instantes, y así dar la solución al problema.



En la figura 10 se muestra el instante en que el péndulo se encuentra en posición vertical ($\pi/2$), en ésta, la velocidad angular es:

$$\omega_f = 1.950 \text{ rad/s}$$

Figura 10. Velocidad angular en $\pi/2$



Esta velocidad no es posible medirla en el péndulo completo, se debe medir en cada objeto por separado, pero como lo que se necesita es una velocidad angular y los dos cuerpos están unidos, ésta es la misma en

cualquiera de los dos cuerpos; en este caso se toma la barra para medirla.

El Working Model también puede ser una herramienta útil para observar y analizar el comportamiento de la velocidad, la aceleración, la posición de los centros de masa y la energía cinética y potencial de cada elemento que conforma el péndulo por medio de cada una de sus gráficas respectivas (Figuras 11, 12, 13).

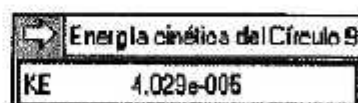


Figura 11. Valor de la energía cinética total del rodillo en el instante en el que el péndulo está vertical.

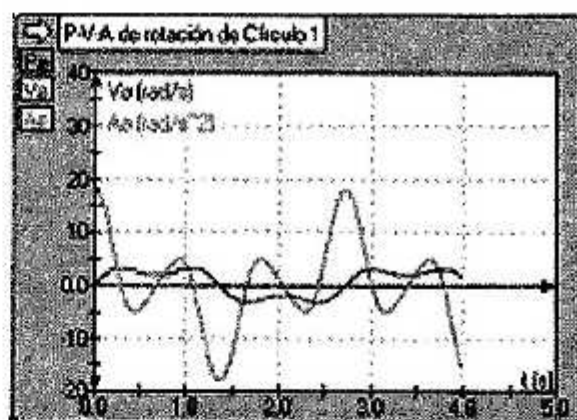


Figura 12. Gráfica de velocidad y aceleración angular del centro de masa del disco Vs. tiempo.

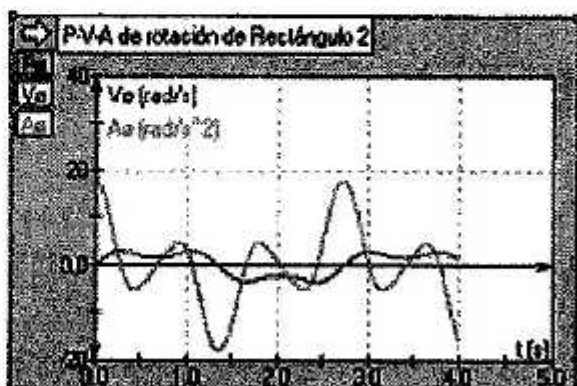
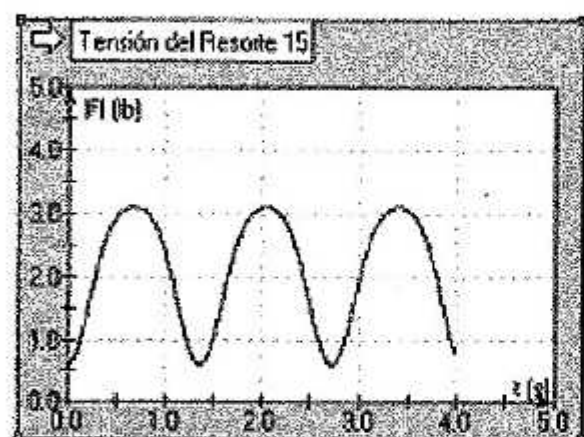


Figura 13. Gráfica de velocidad y aceleración angular



del centro de masa de la barra Vs. tiempo.

Figura 14. Tensión del resorte Vs. tiempo.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Se puede observar que los dos métodos arrojaron valores con una diferencia de 0.29, que aunque no es muy alta indica un poco de imprecisión.

A la hora de comparar los dos métodos se debe tener en cuenta que el programa se basa más en la realidad, es decir, todos los elementos poseen masa no despreciable, por ejemplo el rodillo, en cambio en el análisis matemático se trabaja con un caso muy ideal, en el que el rodillo no tiene masa, lo cual marca la diferencia en el resultado de los dos métodos.

Otra causa de la diferencia, es que el software trabaja con una gravedad de 32 pies/s², mientras que los cálculos matemáticos se hacen considerando la gravedad como 32.2 pies/s².

Es importante considerar que cuando el programa tiene una precisión muy baja los resultados serán muy inexactos, a medida que se le aumenta la precisión va aumentando con ésta la exactitud.

En cambio para el análisis matemático es suficiente trabajar con tres o cuatro decimales, pues a partir de la respuesta no tendrá un cambio muy considerable.

En la figura 11 se observa la energía aportada por el rodillo al sistema que, aunque es muy pequeña, influye en el resultado que se desea obtener.

Si se observan las figuras 12 y 13, se puede ver que el sistema parte del reposo, con una aceleración máxima que a medida que pasa el tiempo va disminuyendo, mientras que la velocidad es cero cuando el tiempo es cero y va aumentando, sin embargo, se puede ver que la velocidad alcanza valores más bajos que la aceleración. Además las gráficas son simétricas y ambos cuerpos tienen la misma velocidad y aceleración angular, por esta razón el sistema se comporta como un cuerpo rígido.

En la figura 14 se observa que el comportamiento de la fuerza ejercida por el resorte es netamente periódica, siendo máxima cuando éste alcanza la máxima elongación exigida por el cuerpo y mínima cuando el péndulo se encuentra en posición horizontal.

CONCLUSIONES

Una de las causas de la diferencia en el resultado, es que en la simulación, el rodillo aporta una pequeña energía al sistema, la cual es despreciada en el análisis matemático.

Un cuerpo rígido tiene la misma velocidad y aceleración angular en todas partes, sin importar la clase de elementos que lo conformen.

Por medio del simulador se puede observar la gráfica de tensión del resorte Vs. tiempo donde se concluye que la fuerza del resorte se comporta como una función periódica.

BIBLIOGRAFÍA

R. C. Hibbeler. Dinámica. P. 467. Prentice Hall. Décima edición. México 2004